



## CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”

Colegiul „Petru Maior” Reghin

EDIȚIA a II-a, 9.04.2022

Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

## I FELADATSOR

(30 pont)

- 5p 1. A  $(b_n)_{n \geq 1}$  mértani haladványban  $b_1 = 2$  és az állandó hányados  $q = \sqrt{5}$ . Számítsd ki a  $b_4$  tag egész részét.
- 5p 2. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  bijektív függvényt. Határozzátok meg az  $f$  és  $f^{-1}$  függvények metszéspontjának abszcisszáját.
- 5p 3. A valós számok halmazán oldjátok meg a  $\log_2(2x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 - x + 2) = 1$  egyenletet.
- 5p 4. Számítsátok ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva a kétjegyű természetes számok halmazából egy számot, az illető szám számjegyeinek összege osztható legyen 11-el.
- 5p 5. Adottak az  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  és  $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j}$  vektorok, ahol  $a$  egy valós szám. Határozzátok meg az  $a$  valós szám értékét, amelyre  $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ .
- 5p 6. Ha  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , amelyre  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x$ , akkor igazoljátok, hogy  $x = \frac{\pi}{8}$ .

## II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix és az  $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$  egyenletrendszer, ahol  $a$  egy valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det(A(4)) = 5$ .
- 5p b) Határozza meg az  $a$  valós szám azon értékét, amelyre az  $A(a)$  mátrix **nem** invertálható!
- 5p c) Ha  $a = 3$ , határozza meg az egyenletrendszer  $(x_0, y_0, z_0)$  megoldásait, amelyre  $z_0^2 = x_0 + y_0$ .
2. A  $G = (1, +\infty)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$  asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $4 * 3 = 2$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $e = 9$  semleges elem az „ $*$ ” műveletre nézve!
- 5p c) Határozza meg az  $x \in G$ , tudva azt, hogy egyenlő a szimmetrikusával a „ $*$ ” műveletre nézve!

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$  függvény.
- 5p a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Számítsd ki:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ .
- 5p c) Határozd meg az  $f$  függvény képhalmazát!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \sqrt{x^2+2}$  függvény. Minden nullától különböző  $n$  természetes szám esetén tekintsük az  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$  számot.
- 5p a) Mutasd ki, hogy  $\int_0^3 f^2(x) dx = 15$ .
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .
- 5p c) Igazold, hogy  $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$ , bármely  $n$ ,  $n \geq 3$  természetes szám esetén.